

2019年天津红桥区高三一模理科数学试卷

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

1. 若 i 为虚数单位，设复数 $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i$ ，则 $|z| =$ （ ）.

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 4x - y + 5 \geq 0 \\ x - y + 2 \geq 0 \\ x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ，则目标函数 $z = y - 2x$ 的最大值为（ ）.

- A. 7 B. 5 C. 3 D. 1

3. 已知 $a = \log_3 4$ ， $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ ， $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}$ ，则 a, b, c 的大小关系为（ ）.

- A. $c > a > b$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $a > b > c$

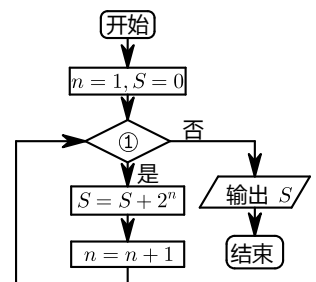
4. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，则“ $q > 1$ ”是“ $\{a_n\}$ 为递增数列”的（ ）.

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 若 $a > 0, b > 0$ ，且 $a + b = 4$ ，则下列不等式恒成立的是（ ）.

- A. $\frac{1}{ab} > \frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 1$ C. $\sqrt{ab} \geq 2$ D. $\frac{1}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{8}$

6. 若如图所示的程序框图输出的 S 是126，则 n 条件为（ ）.



- A. $n \leq 5?$ B. $n \leq 6?$ C. $n \leq 7?$ D. $n \leq 8?$

7. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，点 P 在 C 上，且 $|PF_1| + |PF_2| = 3b$ ， $|PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{9}{4}ab$ ，则双曲线的离心率为（ ）.

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{3}$ D. $\sqrt{10}$

8. 若方程 $\frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = kx - 2$ 有两个不同的实数根，则实数 k 的取值范围是（ ）.

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, 0)$ C. $(0, 4)$ D. $(0, 1) \cup (1, 4)$

二、填空题（本大题共6小题，每小题5分，共30分）

9. 已知集合 $U = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}\}$, 则集合 U 中的元素的个数为 _____. (用数字填写)
10. 在 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^9$ 的展开式中的常数项是 _____. .
11. 设直线 $l: \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 $C: \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ _____. (用数字填写)
12. 若函数 $f(x) = \cos x - \sin x$ 在 $[-a, a]$ 是减函数, 则 a 的最大值是 _____. .
13. 平面 α 截球 O 的球面所得圆的半径为 1, 球心 O 到平面 α 的距离为 $\sqrt{2}$, 则此球的体积为 _____. .
14. 已知两点 $A(1, 0), B(1, \sqrt{3})$, O 为坐标原点, 点 C 在第二象限, 且 $\angle AOC = 120^\circ$, 设 $\overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$), 则 $\lambda =$ _____. .

三、解答题（本大题共6小题，共80分）

15. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ，已知 $b \sin A = 3c \sin B, a = 3, \cos B = \frac{2}{3}$ 。

（1）求： b 的值。

（2）求： $\cos\left(2B - \frac{\pi}{3}\right)$ 的值。

16. 甲、乙两人轮流投篮，每人每次投一球．约定甲先投且先投中者获胜，一直到有人获胜或每人都已投球3次时投篮结束，设甲每次投篮投中的概率为 $\frac{1}{3}$ ，乙每次投篮投中的概率为 $\frac{1}{2}$ ，且各次投篮互不影响．
- (1) 求甲获胜的概率；
- (2) 求投篮结束时甲的投球次数 ζ 的分布列与期望．

17. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \perp AB$, $AB \parallel DC$, $AD = DC = AP = 2$, $AB = 1$, 点 E 为棱 PC 中点.

(1) 证明: $BE \parallel$ 平面 PAD .

(2) 求直线 BE 与平面 PBD 所成角的正弦值 .

(3) 若 F 为棱 PC 上一点, 满足 $BF \perp AC$, 求二面角 $F - AB - P$ 的余弦值 .

18. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , d 为整数, 前 n 项和为 S_n , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 已知 $a_1 = b_1$, $b_2 = 2$, $d = q$, $S_{10} = 100$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 直线 l 过点 $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, 且与椭圆 C 相切于点 P .

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 是否存在过点 $A(4, 0)$ 的直线 m 与椭圆 C 相交于不同的两点 M 、 N , 使得 $36|AP|^2 = 35|AM| \cdot |AN|$? 若存在, 试求出直线 m 的方程; 若不存在, 请说明理由.

20. 已知函数 $f(x) = \ln(e^x + k)$ (k 为常数) 是实数集 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 其中 e 为自然对数的底数.

(1) 求 k 的值.

(2) 讨论关于 x 的方程 $\frac{\ln x}{f(x)} = x^2 - 2ex + m$ 的根的个数.